Medianą zmiennej losowej o rozkładzie P nazywamy liczbę m_e taką, że $P(X \le m_e) \ge \frac{1}{2}$ i $P(X \ge m_e) \ge \frac{1}{2}$.

Wektorem statystyk pozycyjnych dla wektora losowego $(X_1, \dots, X_n)$ nazywamy wektor $\left(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}\right) = (X_{k_1}, \dots, X_{k_n})$ taki że $X_{k_1} \le \cdots \le X_{k_n}$ i $(k_1, \dots, k_n)$ jest permutacją $(1, \dots, n)$. W szczególności $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ oraz $X_{(k)}$ jest k-tą z kolei wartością z pośród $(X_1, \dots, X_n)$ po posortowaniu niemalejąco.

Zad 1 Niech X będzie całkowalną zmienną losową (tzn. $E|X|<\infty$). Pokazać, ze funkcja $\varphi(c)= E|X-c|$ osiąga najmniejszą wartość, gdy c jest medianą zmiennej losowej X ($c = m_e$), czyli średnia odległość zmiennej losowej od stałej jest najmniejsza gdy ta stała jest medianą zmiennej losowej.
Wskazówka Rozważyć 2 przypadki 1) $c<m_e$ 2) $c>m_e$ i w każdym z nich pokazać że $\psi(c)= E|X-c|- E|X-m_e|=Eg(X)\ge 0$ dla każdego c. Aby to pokazać najlepiej narysować $g(X)$ przy ustalonych c, m_e i oszacować ją przez funkcję kawałkami stałą przyjmującą tylko 2 wartości $c-m_e$ oraz m_e-c.

Zad 2 Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie i.i.d z rozkładu o dystrybuancie F i gęstości f. Znajdź wzór na dystrybuantę $F_{X_{(k)}}$ i gęstość $f_{X_{(k)}}$ k-tej statystyki pozycyjnej wektora $(X_1, \dots, X_n)$. W przypadku gdy f jest gęstością rozkładu jednostajnego na $[0,1]$ narysuj gęstość $f_{X_{(k)}}$ oraz znajdź $E(X_{(k)})$ korzystając z odpowiedniego rozkładu Beta.

Zad 3 Niech $X_1,\dots,X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu o ciągłej dystrybuancie F. Statystykę $R=X_{(n)}-X_{(1)}$ nazywamy rozstępem z próby. Wykazać, że $ER = \int_{-\infty}^{\infty} 1-\left[F(x)\right]^n - \left[1-F(x)\right]^n dx$. Oblicz ER w przypadku gdy F jest dystrybuantą rozkładu jednostajnego.
Wskazówka dowolną zmienną losową X można zapisać $X = X_+ - X_-$ gdzie $X_+ = \max\{X, 0\}$ i $X_- = -\min\{X, 0\}$. Natomiast dla dowolnej nieujemnej zmiennej losowej Y mamy $E(Y) = \int_0^\infty 1 - F_Y(t)dt$ gdzie $F_Y(t)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej Y.

Jeśli nie definiujemy funkcji straty to przy obliczaniu ryzyka przyjmujemy kwadratową funkcję straty: $R(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$.

Dla wektora $(X_1, \dots, X_n)$ zmienna losowa $\overline{X}$ oznacza średnią arytmetyczną, tzn. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Zad 4 Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu wykładniczego $Exp(\lambda)$. Znaleźć rozkład $X_{(k)}$. Wykazać, że $X_{(k)}$, $X_{(m)} - X_{(k)}$; $1 \le k < m \le n$ są niezależne. Znaleźć rozkład zmiennej $X_{(k+1)} - X_{(k)}$; $1 \le k \le n-1$.

Zad 5 Niech $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ i $\mathbf{Y}=(Y_1,\dots,Y_n)$ będą niezależnymi próbami prostymi z rozkładów odpowiednio $N(m_x, \sigma^2)$ i $N(m_y, \sigma^2)$. Który z dwóch następujących estymatorów: $T_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \overline{X}\,\overline{Y}$, $T_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ jest lepszym estymatorem parametru $t=m_x m_y$?

Zad 6 Niech $X_1,\dots,X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu jednostajnego $U(0,\theta)$. Rozważmy dwa estymatory $\hat{g}_1(X_1,\dots, X_n) = c_n X_{(n)}$ i $\hat{g}_2(X_1,\dots, X_n) = d_n \overline{X}$. Dobrać stałe c_n oraz d_n tak aby estymatory były nieobciążone ($E\hat{g}_1 = E\hat{g}_2 = \theta$). Który z tych estymatorów jest lepszym estymatorem parametru θ?

Zad 7 Wykonano 10 pomiarów pewnej nieznanej wielkości m jednym przyrządem pomiarowym, a następnie 5 pomiarów innym przyrządem. Zakładamy, że wyniki pomiarów są $X_1, \dots, X_{10}, X_{11}, \dots, X_{15}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi przy czym każda ze zmiennych $X_1, \dots, X_{10}$ ma rozkład normalny $N(m, 0.1^2)$, podczas, gdy każda ze zmiennych $X_{11},\dots,X_{15}$ ma rozkład normalny $N(m, 0.2^2)$. Dobrać tak współczynniki $c_1,\dots,c_{15}$ aby estymator $\hat{m} = \sum_{i=1}^{15} c_i X_i$ był estymatorem nieobciążonym ($E\hat{m} = m$) o najmniejszym ryzyku.

Zad 8 Niech X=(X_1,...,X_n) będzie próbą prostą z rozkładu Poissona $P(\lambda)$. Korzystając z definicji pokazać że $T(X)=\bar{X}$ jest statystyką dostateczną dla λ.

Zad 9 Niech X=(X_1,...,X_n) będzie próbą prostą z rozkładu wykładniczego $Exp(\lambda)$.Korzystając z definicji pokazać że $T(X)=\bar{X}$ jest statystyką dostateczną dla λ.
Wskazówka: Wyznaczyć gęstość rozkładu warunkowego $X_1,\dots,X_{n-1}|\,\bar{X}$ i wywnioskować, że skoro ten rozkład nie zależy od λ to rozkład $X_1,\dots,X_n|\,\bar{X}$ też nie zależy od λ.

Zad 10 Niech X=(X_1,...,X_n) będzie próbą prostą z rozkładu

a) Gamma(α,λ), o gęstości $f(x)=\frac{1}{\lambda^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\lambda}}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$

b) Pareto(α,λ), o gęstości $f(x)=\frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\lambda+1}\mathbb{I}_{(\alpha,\infty)}(x)$

Korzystając z kryterium faktoryzacji wyznacz statystykę dostateczną dla (α,λ).

Zad 11 Niech $\mathbf{Z}$=((X_1,Y_1),...,(X_n,X_n)) będzie próbą z dwuwymiarowego rozkładu normalnego $N(\mathbf{0},\mathbf{\Sigma})$, gdzie $\mathbf{0}$ jest wektorem zerowym a $\mathbf{\Sigma}=\begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}$. Wyznacz statystykę dostateczną dla ρ. Udowodnij , że statystyki $T_1(\mathbf{Z})=\overline{\mathrm{X}}$ i $T_2(\mathbf{Z})=\overline{Y}$ są swobodne a statystyka $T_1(\mathbf{Z})+T_2(\mathbf{Z})$ nie jest swobodna.

Zad 12 Niech X=(X_1,...,X_n) będzie próbą prostą z rozkładu Poissona $P(\theta)$. Rozważamy estymator prawdopodobieństwa $P_\theta(X_{n+1}=0)=e^{-\theta}$ (prawdopodobieństwo tego, że następna wylosowana liczba będzie zerem). Najprostszym nieobciążonym estymatorem tego prawdopodobieństwa jest $T_1=I(X_1=0)$. Korzystając z twierdzenia Rao-Blackwella poprawić ten estymator i obliczyć ryzyko niepoprawionego i poprawionego estymatora.

Zad 13. Niech X_1,...,X_n będzie próbą prostą z rozkładu Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu θ. Niech rozkładem „a priori" dla θ będzie rozkład Beta(α,β). Wyznacz estymator bayesowski parametru θ oraz oblicz ryzyko tego estymatora.

Zad 14 Niech $\boldsymbol{X}$=(X_1,...,X_n) będzie próbą prostą z rozkładu wykładniczego $p(x\,|\,\theta)=\theta e^{-\theta x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}$, θ>0. Wyznaczyć estymator bayesowski parametru θ (przy kwadratowej funkcji straty) jeżeli rozkładem „a priori" tego parametru jest rozkład Gamma(p,a) o funkcji gęstości $f(\theta)=\frac{a^p}{\Gamma(p)}\theta^{p-1}e^{-a\theta}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(\theta)$.

Zad 15 Niech $\boldsymbol{X}$=(X_1,...,X_n) będzie próbą prostą z rozkładu Poissona $p(x\,|\,\lambda)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$,λ>0, x=0,1,... . Wyznaczyć estymator bayesowski parametru λ^2 (przy kwadratowej funkcji straty) jeżeli rozkładem „a priori" tego parametru jest rozkład wykładniczy o funkcji gęstości $f(\lambda)=e^{-\lambda}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(\lambda)$.

Zad 16 Towarzystwo ubezpieczeniowe szacuje, że około 20% pasażerów linii lotniczych wykupuje polisę ubezpieczeniową na przelot. Proporcja ta jest różna dla różnych terminali, przy czym zmienność charakteryzowana odchyleniem standardowym wynosi 10%. Losowa próbka 50 pasażerów wybranego terminalu pokazała, że tylko 5 nabyło polisę. Przyjmując jako rozkład a priori odpowiedni rozkład Beta oszacować prawdziwą proporcję pasażerów w tym terminalu, którzy nabyli polisę.

Zad 17 Liczba rozmów przychodzących w małej centrali telefonicznej ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną λ. Wartość oczekiwana λ zmienia się w poszczególnych dniach i zmienność ta jest reprezentowana rozkładem Gamma ze średnią 100 i wariancją 200. Jeżeli w danym dniu było 90 rozmów przychodzących to jaka jest ocena średniej liczby przychodzących rozmów w tym dniu?

Zad 18 Przypuśćmy, że X ma rozkład $U(0,\theta)$. Załóżmy, że rozkładem „a priori" parametru θ jest rozkład $\pi(\theta)=\theta\,e^{-\theta}$, θ>0. Wyznaczyć estymator bayesowski parametru θ przy modułowej funkcji straty.

Zad 19 Niech $\boldsymbol{X}=(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu normalnego $N(\theta,1)$. Wyznaczyć estymator bayesowski parametru θ (przy kwadratowej funkcji straty) jeżeli rozkładem „a priori" tego parametru jest rozkład wykładniczy o funkcji gęstości $f(\theta)=e^{-\theta}1_{(0,\infty)}(\theta)$.

Zad 20. Niech $X_1,...,X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu Bernoulliego $B(1,p)$. Udowodnij że $\bar{X}$ jest minimaksowym estymatorem parametru p przy funkcji straty $L(p,d)=\dfrac{(p-d)^2}{p(1-p)}$.

Zad 21. Niech $\hat{\theta}$ będzie estymatorem parametru $\theta\in\Theta$ o ryzyku $R(\hat{\theta},\theta)$ takim, że $\sup_{\theta\in\Theta} R(\hat{\theta},\theta)=d$. Udowodnić, że jeśli istnieje ciąg rozkładów a priori τ_k i odpowiadający im ciąg estymatorów bayesowskich $\tilde{\theta}_k$ dla których ciąg ryzyk bayesowskich $r_{\tau_k}(\tilde{\theta}_k,\theta)$ zmierza do d gdy $k\to\infty$ to estymator $\hat{\theta}$ jest minimaksowy ($\lim_{k\to\infty} r_{\tau_k}(\tilde{\theta}_k,\theta)=\sup_{\theta\in\Theta} R(\hat{\theta},\theta)\Rightarrow\hat{\theta}$-minimaksowy)

Zad 22. Niech $X_1,...,X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu Poissona P(λ). Niech rozkładem „a priori" dla λ będzie rozkład wykładniczy z parametrem k (o wartości oczekiwanej równej k). Wyznaczyć estymator bayesowski parametru λ przy funkcji straty $L(\lambda,d)=\dfrac{(\lambda-d)^2}{\lambda}$. Czy jest to estymator minimaksowy? Czy $\bar{X}$ jest estymatorem minimaksowym przy tej funkcji straty?
Wskazówka: skorzystać z tezy zadania 2

Zad 23 Niech $X_1,...,X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(m,\sigma^2)$ gdzie $\sigma^2>0$ jest dowolną znaną liczbą. Udowodnij, że $\bar{X}$ jest minimaksowym estymatorem parametru m.
Wskazówka: skorzystać z tezy zadania 2 dla ciągu rozkładów a priori $N(0,k)$

Zad 24 Niech $(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu o funkcji gęstości $f(x)=2b^2x^{-3}\mathbf{1}_{(b,\infty)}(x)$, gdzie $b>0$. Wyznaczyć statystykę dostateczną i zupełną dla b a następnie wyznaczyć nieobciążony estymator b^r, $r\epsilon\mathbb{R}$, będący funkcją tej statystyki.

Zad 25. Niech $(X_1,...,X_m)$ i $(Y_1,...,Y_n)$ będą niezależnymi próbami prostymi z rozkładów $U(0,\theta_x)$ i $U(0,\theta_y)$. Wyznaczyć statystykę dostateczną i zupełną dla (θ_x, θ_y) a następnie wyznaczyć nieobciążony estymator $\dfrac{\theta_x}{\theta_y}$ będący funkcją tej statystyki.

Zad 26 Niech $(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu Poissona z parametrem λ. Wyznacz estymator nieobciążony o minimalnej wariancji parametru $\lambda^k, k\epsilon\mathbb{N}$.

Zad 27 Niech $(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu geometrycznego $P(X=x)=(1-p)p^x$, $x=0,1,\dots$ Wyznaczyć estymator nieobciążony o minimalnej wariancji dla $P(X\le 2)$.

Zad 28 Niech $X_1,\dots,X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(m,\sigma^2)$. Wykazać, że ENMW dla σ^2 jest niedopuszczalny.

Zad 29 Niech $X_1,\dots,X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu Gamma$(2,\theta)$ o gęstości $f(x)=\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Wyznaczyć ENMW dla θ^r , $r>0$.

Zad 30 Niech $X_1,\dots,X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $U([a,b])$. Wyznaczyć ENMW dla $b-a$ i $\frac{a+b}{2}$.

Zad 31 Niech $\boldsymbol{X}=(X_1,...,X_n)$ będzie wektorem losowym o niezależnych współrzędnych takich, że X_i mają rozkłady normalne $N(\alpha+\beta t_i, \sigma^2)$, gdzie α, β, σ^2 są nieznane a t_i są znanymi stałymi różnymi między sobą, $i=1,...,n$. Wyznaczyć ENMW parametrów α i β na podstawie obserwacji wektora $\boldsymbol{X}$.

Zad 32 Udowodnić następujące własności Informacji Fishera:
- Gdy T jest swobodna dla θ to $I_T(\theta) = 0$.
- Informacja Fishera nie zależy od wyboru miary dominującej (Skorzystać z faktu $P_\theta \ll \mu \wedge P_\theta \ll \nu \Rightarrow P_\theta \ll \mu+\nu$ oraz $\mu \ll \mu+\nu, \nu \ll \mu+\nu$)
- Przy warunkach regularności pozwalających na zmianę kolejności całkowania względem rozkładu i różniczkowania po θ mamy $I(\theta) = -E_\theta\left[\frac{d^2 \log p(X|\theta)}{d\theta^2}\right]$

Zad 33 Niech $X=(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu Laplace'a o gęstości $f(x)=\frac{1}{2\beta}e^{-\frac{|x|}{\beta}}$. Wyznaczyć ENMW parametru β i sprawdzić, czy jego wariancja osiąga dolne ograniczenie Cramera-Rao.

Zad 34 Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$będzie próbą prostą z rozkładu o gęstości $f_\theta(x)$. Udowodnij, że jeśli można zamienić kolejność różniczkowania względem θ i całkowania względem x funkcji $f_\theta(x)$ to: $I(\theta) = n\, i(\theta)$. Oblicz $I(\theta)$ gdy $f_\theta(x)$ jest gęstością rozkładu $N(\theta, \theta^2)$.

Zad 35 Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$będzie próbą prostą z rozkładu jednostajnego $U(0,\theta)$. Oblicz $I(\theta)$ oraz $i(\theta)$. Czy $I(\theta) = n\, i(\theta)$? Czy wariancja ENMW parametru θ spełnia dolne ograniczenie Cramera-Rao?

Zad 36 Niech $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(m,1)$. Wyznaczyć ENMW dla $g(m) = e^m$. Obliczyć granicę ilorazu wariancji estymatora i dolnego ograniczenia Cramera-Rao gdy $n \to \infty$.

Zad 37 Niech $X_1,...,X_m$ i $Y_1,...,Y_n$ będą dwoma niezależnymi próbami prostymi z rozkładów $N(\mu_1,1)$ i $N(\mu_2,1)$. Znaleźć 95% przedział ufności dla μ_1-μ_2 oparty na odpowiedniej statystyce dostatecznej.

Wskazówka: Znaleźć rozkład $\mu_1 - \mu_2 - (\bar{X}_m - \bar{Y}_n)$.

Zad 38 Niech $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu jednostajnego $U(0,\theta)$. Wyznaczyć 90% przedział ufności dla parametru θ oparty na odpowiedniej statystyce dostatecznej.

Wskazówka: Znaleźć rozkład $\frac{X_{(n)}}{\theta}$.

Zad 39 Załóżmy, że $X_1,...,X_4$ jest próbą prostą z rozkładu normalnego $N(m,\sigma^2)$ o nieznanej wartości oczekiwanej i nieznanej wariancji, zaś X_5 jest zmienną losową z tego samego rozkładu niezależną od próbki. Interpretujemy zmienną X_5 jako kolejną obserwację, która pojawi się w przyszłości, ale obecnie jest nieznana. Zbuduj „*przedział ufności*" $[L,U]=[L(X_1,...,X_4), U(X_1,...,X_4)]$ oparty na próbce $X_1,...,X_4$ taki, że $P(L(X_1,...,X_4)\le X_5 \le U(X_1,...,X_4))=0.95$,

Wskazówka: Przyjąć $L(X_1,...,X_4) = \overline{X} - cS$ oraz $U(X_1,...,X_4) = \overline{X} + cS$, gdzie $\overline{X} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} X_i$, $S^2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(X_i - \overline{X})^2$,

c jest szukaną stałą.

Zad 40 Niech $X_1,...,X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu jednostajnego $U[\theta_1,\theta_2]$. Wyznaczyć estymator największej wiarygodności parametru (θ_1,θ_2).

Zad 41 Niech $\mathbf{X}=(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu Poissona z parametrem λ, który chcemy oszacować. Niestety nie możemy obserwować wartości $X_1,...,X_n$. Możemy jedynie obserwować czy $X_i = 0$, albo czy $X_i > 0$, dla $i = 1, \dots, n$. Wyznaczyć estymator największej wiarygodności parametru λ.

Zad 42 Niech $X_1,...,X_{100}$ będzie próba losową z rozkładu wykładniczego o nieznanej wartości oczekiwanej a (tzn. $f(x)=\frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$). Znaleźć estymator największej wiarygodności parametru a na podstawie częściowej informacji o próbce, a mianowicie na podstawie tego, że 80 zmiennych (spośród wszystkich 100 z próbki) przybrało wartości poniżej 3 i średnia arytmetyczna z tych 80 wartości wynosi 2.

Zad 43 Skonstruować estymator największej wiarygodności parametru $\theta>0$ i asymptotyczny przedział ufności na poziomie 1-α=0.95 oparty na n elementowej próbie prostej $\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ z rozkładu normalnego $N(\theta,\theta^2)$.

Zad 44 Liczby wypadków $N_1,\dots,N_k$ zgłoszonych w towarzystwie ubezpieczeniowym w kolejnych k latach są niezależnymi zmiennymi losowymi. Zakłada się że N_i ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda\cdot m_i$, gdzie m_i jest znaną liczbą samochodów ubezpieczonych w i-tym roku, a λ jest nieznanym parametrem intensywności. Wyznacz estymator największej wiarygodności parametru λ oraz asymptotyczny przedział ufności na poziomie 1-α =0.95.

Zad 45 Skonstruować estymator największej wiarygodności parametru θ i asymptotyczny przedział ufności na poziomie 1-α=0.95 oparty na n elementowej próbie prostej $X_1,X_2,...,X_n$ z rozkładu o gęstości $p(x,\theta)=\theta^2 x\, exp(-\theta x)$, $\theta>0$, $x>0$.

Zad 46 Mamy podejrzenie, że na kostce do gry, szóstka wypada zbyt często. Aby to sprawdzić rzucamy kostką wielokrotnie aż do momentu wyrzucenia szóstki i zapisujemy liczbę rzutów. Następnie eksperyment ten powtarzamy n razy. Na podstawie uzyskanych wyników skonstruuj estymator największej wiarygodności i asymptotyczny przedział ufności na poziomie 1-α =0.95 prawdopodobieństwa wyrzucenia szóstki.

Zad 47 Zmienna losowa X ma funkcję gęstości $f(x)$. Na podstawie pojedynczej obserwacji skonstruować najmocniejszy test hipotezy H$_0$: $f(x)=2x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ przeciwko H$_1$: $f(x)=4x^3\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ na poziomie α. Wyznaczyć moc tego testu i narysować wykres mocy w zależności od α. Obliczyć p-wartość gdy $X=t\in[0,1]$ oraz sporządzić wykres p-wartości w zależności od t.

Zad 48 Niech $\boldsymbol{X}=(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu Gamma o gęstości $f(x)=\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Skonstruować najmocniejszy test hipotezy H$_0$:$\theta=\theta_0>0$ przeciwko alternatywie H$_1$:$\theta=\theta_1>\theta_0$ na poziomie α. Wyznaczyć moc tego testu. Korzystając z CTG narysować wykres mocy testu w zależności od n przy ustalonych $\theta_0, \theta_1, \alpha$ oraz wykres mocy testu w zależności od θ_1 przy ustalonych θ_0, n, α.

Zad 49 Niech $\boldsymbol{X}=(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu normalnego $N(0,\theta^2)$. Skonstruować najmocniejszy test hipotezy H$_0$:$\theta=\theta_0>0$ przeciwko alternatywie H$_1$:$0<\theta=\theta_1<\theta_0$ na poziomie α. Wyznaczyć moc tego testu i narysować wykres mocy testu w zależności od θ_1 przy ustalonych θ_0, n, α.

Zad 50 Niech $\boldsymbol{X}=(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Skonstruować najmocniejszy test hipotezy H$_0$: $p=p_0$ przeciwko alternatywie H$_1$:$p=p_1>p_0$ na poziomie α. Wyznaczyć dokładną postać testu dla $n=6$, $p_0=0{,}25$, $\alpha=0{,}05$. Wyznaczyć postać testu dla dużych n korzystając z CTG.

Zad 51 Niech $X_1,...,X_9$ będzie próbą prostą z rozkładu normalnego $N(m,1)$ o nieznanej wartości oczekiwanej znanej wariancji σ^2=1. Rozpatrzmy zadanie testowania hipotezy H_0: m=0 przeciwko alternatywie H_1: m=0,5. Należy zbudować taki test dla którego **suma** prawdopodobieństw błędów I i II rodzaju, oznaczanych odpowiednio α i β **jest najmniejsza**. Oblicz tę najmniejszą wartość $\alpha+\beta$.

Zad 52 Niech $\boldsymbol{X}=(X_1,...,X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu jednostajnego $U(0,\theta)$. Skonstruować test oparty na ilorazie wiarygodności hipotezy H$_0$:$\theta=\theta_0>0$ przeciwko alternatywie H$_1$: $\theta\neq\theta_0$ na poziomie α.

Zad 53 Niech $X=(X_1,...,X_n)$ i $Y=(Y_1,...,Y_m)$ będą niezależnymi próbami prostymi z rozkładów $N(m_x,\sigma^2)$ i $N(m_y,\sigma^2)$ odpowiednio. Nieznana wariancja σ^2 jest taka sama w obu rozkładach. Skonstruować test oparty na ilorazie wiarygodności hipotezy $H_0{:}\, m_x = m_y$ przeciwko alternatywie $H_1{:}\, m_x \neq m_y$ na poziomie α.

Zad 54 Rzucamy n razy kostką do gry. Na podstawie uzyskanych wyników skonstruować test rzetelności kostki oparty na ilorazie wiarygodności. Test rzetelności ma sprawdzać czy prawdopodobieństwo każdej ścianki jest takie samo przeciwko alternatywie, że tak nie jest.